Algèbre 4 - Espaces vectoriels

Dans ce document, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition (Espace vectoriel (ev))**.** *Soit E un ensemble possédant une addition notée "+", c'est-à-dire une application $(\underbrace{x}_{\in E}, \underbrace{y}_{\in E}) \mapsto \underbrace{x+y}_{\in E}$, et un produit externe (ou "multiplication par un scalaire"), noté ".", c'est-à-dire une application $(\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{K}}, \underbrace{x}_{\in E}) \mapsto \underbrace{\lambda.x}_{\in E}$. On dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** ($\mathbb{K}$-ev) si*

- *l'addition de E possède les 4 propriétés suivantes :*
  1. *l'associativité, c'est-à-dire $\forall x,y,z \in E,\ (x+y)+z = x+(y+z)$*
  2. *la commutativité, c'est-à-dire $\forall x,y \in E,\ x+y = y+x$*
  3. *l'existence d'un élément neutre 0_E vérifiant $\forall x \in E,\ x+0_E = x$*
  4. *l'existence pour tout $x \in E$ d'un symétrique x' tel que $x+x' = 0_E$. (un tel x' est alors unique, et noté $-x$)*
- *$\forall x,y \in E,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, on a :*
  1. *$\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$*
  2. *$1.x = x$*
  3. *$(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$*
  4. *$\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$*

*On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la signification de "+" et ".", on dit simplement que E est un $\mathbb{K}$-ev.*

Premiers exemples simples de $\mathbb{K}$-ev : $\mathbb{K}$ lui-même, les ensembles de n-uplets $\mathbb{K}^n$, les polynômes $\mathbb{K}[X]$ et les ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (on assimile $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$).

Les deux théorèmes suivants permettent d'identifier de nombreux autres ev.

- **Théorème [T1] :** *Si Ω un **ensemble quelconque** et F un $\mathbb{K}$-ev, alors l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega,F)$ des applications de Ω dans F, muni des opérations usuelles, est un $\mathbb{K}$-ev. (son élément neutre est la fonction nulle)*
- **Théorème [T2] :** *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev, alors le produit cartésien $E \times F$, muni des opérations usuelles, est un $\mathbb{K}$-ev. (son élément neutre est $(0_E, 0_F)$)*

Conséquences importantes :

— l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des **suites** à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev. Son élément neutre est la suite nulle.

— si D est une partie de $\mathbb{R}$ (intervalle ou pas), l'ensemble des **fonctions** $D \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev, dont l'élément neutre est la fonction nulle. De même, l'ensemble des fonctions $D \to \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev.

Définition. *Une **combinaison linéaire** (abrév. **CL**) de n vecteurs $x_1,\dots,x_n$ est un vecteur de la forme :*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad , \quad \text{où } \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$$

Théorème/définition ([**T3**] Sous-espace vectoriel (sev))**.** *Si E est un $\mathbb{K}$-ev, une partie F de E est appelée **sous-espace vectoriel** de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *0_E appartient à F*
- *F est stable par combinaison linéaire, i.e. $\forall x,y \in F,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda.x + \mu.y) \in F$.*

Dans ce cas, F est lui-même un $\mathbb{K}$-ev (muni des mêmes opérations que E).

Remarque : si F est un sev, alors par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute CL de n vecteurs de F appartient à F.

Conséquences importantes :

- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.
- Les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I sont des sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- Si $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'ensemble $\{X \in \mathbb{K}^p \text{ tq } AX = 0\}$ (appelé *noyau de* A) est un sev de $\mathbb{K}^p$.
- Si $a, b \in \mathbb{C}$, l'ensemble des suites u telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire **homogène** est un sev de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$.

Cf exo 1

Théorème ([**T4**] Intersection de sev)**.**
*Si F et G sont deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E, alors leur **intersection** $F \cap G$ est aussi un sev de E.*
Plus généralement, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sev (I est un ensemble quelconque), alors leur intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev.

Théorème/définition ([**T5**] Sev engendré par une famille de vecteurs)**.**
Si $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs de E, l'ensemble

$$Vect(e_1, \dots, e_n) = \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

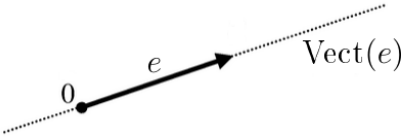
*c'est-à-dire l'ensemble de toutes les CL des e_i, est un sev de E, appelé **sev engendré par** $(e_1, \dots, e_n)$.*

De plus, $Vect(e_1, \dots, e_n)$ est le plus petit sev contenant les e_i, au sens où si un sev F contient les e_i, alors $Vect(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

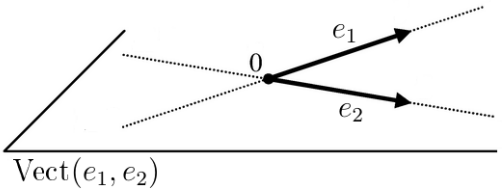
Exemples élémentaires de sev :

L'ensemble $\{0_E\}$ est toujours un sev de E, appelé *sous-espace nul*.

Soit $e \in E$. Le sev Vect(e) est l'ensemble $\{\lambda.e \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ des vecteurs colinéaires à e. Si $e \neq 0$, ce sev est appelé **droite vectorielle engendrée par** e, parfois noté $\mathbb{K}e$.



Soit $e_1, e_2 \in E$. Le sev Vect(e_1, e_2) est l'ensemble $\{\lambda_1.e_1 + \lambda_2 e_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$. Si e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, ce sev est appelé **plan vectoriel engendré par** e_1 **et** e_2.



Cf exo 4 Q1

Théorème/définition ([**T6**] Somme de deux sev)**.** *Soit F et G sont deux sev de E. L'ensemble*

$$F + G = \{f + g \mid f \in F \text{ et } g \in G\}$$

*c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs de E qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, est un sev de E, appelé **somme de** F **et** G.*

Théorème/définition ([**T7**] Somme directe)**.** *Si F et G sont deux sev de E, il y a équivalence entre*

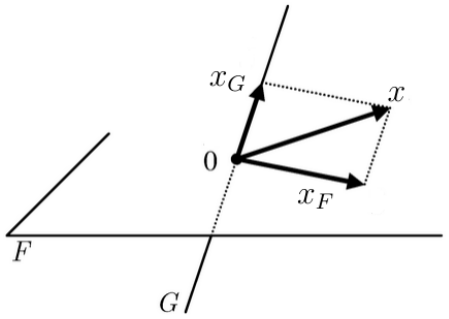
1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. *Pour tout $x \in (F+G)$, la décomposition $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$ est unique.*

On dit alors que F et G sont en ***somme directe****, et pour le signifier, $F+G$ s'écrit $F \oplus G$.*

Théorème/définition ([**T8**] sev supplémentaires dans E)**.**
Si F et G sont deux sev de E, il y a équivalence entre

1. $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $F + G = E$
2. ***Tout élément*** $x \in E$ *se décompose de façon* ***unique*** *sous la forme $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$.*

On dit alors que F et G sont ***supplémentaires dans*** *E, ce qui peut se résumer par l'égalité* $\boxed{F \oplus G = E}$.



2 Familles finies de vecteurs

Définition (Familles libres/liées)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille* ***libre*** *si la seule façon d'obtenir une CL nulle des vecteurs e_i est de prendre tous les coefficients nuls, ou autrement dit, si pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on a l'implication*

$$\big(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0\big) \implies \big(\forall i \in [\![1, p]\!]\,,\ \lambda_i = 0\big)$$

A l'inverse, si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit que c'est une famille ***liée****. Dans ce cas, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que :*

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$$

Une relation de ce type est appelée une ***liaison*** *entre les vecteurs e_i.*

Propositions [T09] :

- Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre ssi on peut, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$, faire l'identification suivante :

$$\big(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p\big) \implies \big(\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = \mu_i\big)$$

- Une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs est une CL des autres. Plus précisément, s'il existe une liaison, tous les vecteurs impliqués dans cette liaison (c'est-à-dire les e_i tels que $\lambda_i \neq 0$) peuvent s'écrire comme une CL des autres vecteurs.
- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, alors pour tout $x \in E$, on a l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{c}\text{la famille } (e_1, \dots, e_p, x)\\ \text{est libre}\end{array}\right) \iff \big(x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)\big)$$

Cf exo 2

Théorème ([**T10**])**.** *Dans $\mathbb{K}[X]$, si une famille de polynômes non nuls $(P_1, \dots, P_n)$ est de degrés distincts deux à deux, alors elle est libre.*

Définition (Familles génératrices)**.** *On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ est **génératrice de** E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une CL des e_i, ou autrement dit, si pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.*

Théorème/définition ([**T11**] Base (finie))**.** *Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Une **base finie** de E est une famille de vecteurs $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ qui est à la fois **libre et génératrice**.*
*Dans ce cas, chaque vecteur $x \in E$ s'écrit comme une CL des e_i : $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ (famille génératrice) et les coefficients λ_i sont **uniques** (famille libre). Ils sont alors appelés les **coordonnées de** x **dans la base** $\mathcal{E}$, et on peut associer à x la **matrice colonne de ses coordonnées** : $Mat_{\mathcal{E}}(x) = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{bmatrix}$*

— **Base canonique de $\mathbb{K}^n$:** $\text{Can} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

— **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$:** $\text{Can} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$

— **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:** l'ensemble des matrices élémentaires $E_{i,j}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui placé en ligne i colonne j, qui vaut 1.

Cf exo 4 Q 2,3

Le théorème suivant fait un double lien entre les bases et les sommes directes de sev.

Théorème (des bases adaptées [**T12**])**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev.*

1. *Si F et G sont deux sev tels que*
   — *$F \oplus G = E$ (F et G sont supplémentaires dans E)*
   — *F admet une base $(e_1, \dots, e_k)$*
   — *G admet une base $(e_{k+1}, \dots, e_n)$*
   alors la famille $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de E.
2. *Réciproquement, si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $k \in [\![1, n]\!]$, alors si on pose : $\begin{cases} F = Vect(e_1, \dots, e_k) \\ G = Vect(e_{k+1}, \dots, e_n) \end{cases}$, on a $E = F \oplus G$.*

3 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition (ev de dimension finie)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.*

Théorème ([**T13**] base incomplète, base extraite)**.** *Soit E un ev de dimension finie.*

- ***Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base finie de E.*** *Plus précisément, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre, alors il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_m$ choisis dans $\mathcal{G}$ tels que la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_m)$ soit une base de E.*
- ***On peut extraire de toute famille génératrice finie une base finie.***

Théorème/définition ([**T14**] Dimension)**.** *Soit E un ev de dimension finie. Alors E admet des bases finies et toutes ses bases ont **même cardinal** $n \in \mathbb{N}$. L'entier n est alors appelé la **dimension de** E, notée $\dim(E)$. De plus :*

- *toute famille libre est nécessairement de cardinal $\leqslant n$;*
- *toute famille génératrice de E est nécessairement de cardinal $\geqslant n$.*

Trois exemples fondamentaux :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n \qquad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$$

Quelques exemples déjà rencontrés dans des espaces de fonctions :

- Si I est un intervalle et $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telles que :
$$y' + ay = 0$$
est l'ensemble S des fonctions du type λe^{-A} (où A est une primitive de a), où $\lambda \in \mathbb{K}$. Si l'on note $f = e^{-A}$, alors $S = \text{Vect}(f)$. Autrement dit, il s'agit d'un sev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ de dimension 1, et plus précisément la droite vectorielle dirigée par f.
- L'ensemble S des fonctions solutions d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants, comme par exemple :
$$y'' + y' - 6y = 0$$
est l'ensemble des fonctions du type :
$$t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-3t}\,, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$
Donc si on note $f \ : \ t \mapsto e^{2t}$ et $g \ : \ t \mapsto e^{-3t}$, on a :
$$S = \text{Vect}(f, g)$$
Comme les fonctions f et g ne sont pas colinéaires (par exemple parce que le quotient $\frac{f}{g}$ n'est pas constant, à méditer), S est donc un sev de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de dimension 2, et plus précisément le plan engendré par f et g.
- L'ensemble S des suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, comme par exemple :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$$
est l'ensemble des suites du type :
$$n \mapsto \lambda 2^n + \mu(-3)^n\,, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$
Donc si on note les suites $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = \left((-3)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
$$S = \text{Vect}(v, w)$$
Comme les suites v et w ne sont pas colinéaires (par exemple parce que le quotient $\frac{2^n}{(-3)^n}$ n'est pas constant), S est donc un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2, et plus précisément le plan engendré par v et w.

Remarque : dans tout ev E, le sous-espace nul $\{0_E\}$ est de dimension 0, car il admet comme base la famille vide.

Théorème ([**T15**]). *Dans un ev E de dimension finie, si $\mathcal{E}$ est une famille de vecteurs* ***de même cardinal que la dimension de*** *E, alors :*

- *si $\mathcal{E}$ est libre, elle est aussi génératrice (et c'est donc une base) ;*
- *si $\mathcal{E}$ est génératrice, elle est aussi libre (et c'est donc une base).*

Cf exo 4 Q 4

Application : dans $\mathbb{K}_n[X]$ (de dimension $n+1$) toute famille de $n+1$ polynômes non nuls $(P_0, \dots, P_n)$ **de degrés échelonnés** (c'est-à-dire telle que $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$) est une **base** de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, elle est libre (d'après [T10]) et a le bon cardinal.

Théorème/définition ([**T16**] Rang d'une famille de vecteurs). *Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille de vecteurs d'un ev E (de dimension finie ou pas), on appelle* ***rang de*** *$\mathcal{E}$ la dimension du sev engendré par $\mathcal{E}$. Autrement dit :*

$$rg(e_1, \dots, e_p) \;=\; dim\,(\,Vect(e_1, \dots, e_p))$$

On a alors les propriétés suivantes :

1. $rg(e_1, \dots, e_p) \leqslant p$
2. $(rg(e_1, \dots, e_p) = p) \iff (e_1, \dots, e_p)$ *est libre*

Cf exo 4 Q 5

Théorème ([**T17**] sev d'un ev de dimension finie). *Si F est un sev d'un ev E de dimension finie, alors F est de dimension finie, et $dim(F) \leqslant dim(E)$. On a de plus l'équivalence :*

$$(dim(F) = dim(E)) \iff F = E$$

Conséquence en pratique : Si F et G sont deux sev, on a l'implication :

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases} \implies F = G$$

Théorème ([**T18**] Supplémentaires, et dimension). *Soit E un ev de dimension finie.*

- *Tout sev F admet un sev supplémentaire G.*
- *Tout supplémentaire G de F est de dimension $dim(E) - dim(F)$, de sorte que :*

$$dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$$

- *Réciproquement, si G est un sev tel que* $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{cases}$ *, alors $F \oplus G = E$.*

Cf exo 4 Q 6

Proposition ([**T19**] Formule de Grassmann). *Si F et G sont deux sev d'un ev de dimension finie, alors :*

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Espaces vectoriels : démonstrations des théorèmes du cours

---

dem T1 : On vérifie à la main les 8 propriétés qui définissent un espace vectoriel.

---

dem T2 : On définit les opérations usuelles sur $E \times F$ par :

$$\forall (e_1,e_2)\in E^2\,,\ \forall (f_1,f_2)\in F^2\,,\ \forall \lambda\in\mathbb{K}\ :\ \begin{cases} \text{Addition : } (e_1,f_1)+(e_2,f_2)=(\underbrace{e_1+e_2}_{\in E},\underbrace{f_1+f_2}_{\in F})\in E\times F \\ \text{Produit externe : } \lambda.(e_1,f_1)=(\underbrace{\lambda.e_1}_{\in E},\underbrace{\lambda.f_1}_{\in F})\in E\times F \end{cases}$$

Ces opérations sont bien définies, et il suffit de montrer qu'elles vérifient les 8 propriétés.

---

dem T3 : pour montrer que F est lui-même un $\mathbb{K}$-ev, on vérifie sans difficulté les 8 propriétés.

---

dem T4 : Montrons que $F\cap G$ est un sev de E.

- $0_E\in F$ car F est un sev. $0_E\in G$ car G sev. Donc $0_E\in F\cap G$.
- Stabilité par CL : $\forall (x,y)\in (F\cap G)^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{cases} x\in F \\ y\in F \end{cases} \underset{F\,\text{sev}}{\Longrightarrow} (\lambda.x+\mu.y)\in F \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x\in G \\ y\in G \end{cases} \underset{G\,\text{sev}}{\Longrightarrow} (\lambda.x+\mu.y)\in G$$

donc $(\lambda.x+\mu.y)\in F\cap G$. ok

Cette démonstration s'adapte très bien au cas d'une famille $(F_i)_{i\in I}$ quelconque de sev, puisqu'on on a :

- $\forall i\in I$, $0_E\in F_i$ car F_i est un sev. Donc $0_E\in\bigcap_{i\in I}F_i$.
- Stabilité par CL : $\forall x,y\in\bigcap_{i\in I}F_i$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a pour tout $i\in I$:

$$\begin{cases} x\in F_i \\ y_i\in F \end{cases} \underset{F_i\,\text{sev}}{\Longrightarrow} (\lambda.x+\mu.y)\in F_i$$

donc $(\lambda.x+\mu.y)\in\bigcap_{i\in I}F_i$. ok

---

dem T5 : Soit $V=\text{Vect}(e_1,\dots,e_n)=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_i.e_i\mid \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\right\}$. Mq V est un sev de E.

- 0_E est une CL des e_i : la CL obtenue avec tous les $\lambda_i=0$. Donc $0_E\in V$.
- Stabilité par CL : $\forall(x,y)\in V^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.

Par définition, il existe $\begin{cases}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n \\ (\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n\end{cases}$ tq $\begin{cases} x=\sum_{i=1}^n\alpha_i.e_i \\ y=\sum_{i=1}^n\beta_i.e_i\end{cases}$

Donc $\lambda.x+\mu.y\ =\ \lambda.\sum_{i=1}^n\alpha_i.e_i+\mu.\sum_{i=1}^n\beta_i.e_i\ =\ \sum_{i=1}^n(\lambda\alpha_i+\mu\beta_i).e_i$.
Il s'agit d'une CL des e_i, donc $(\lambda.x+\mu.y)\in V$. ok

Considérons maintenant un sev F contenant les e_i. Comme F est stable par CL, il contient donc aussi toutes les CL possibles des e_i. Autrement dit, il contient V, d'où $V\subset F$.

---

dem T6 : On note $H = F + G = \{f + g \mid f \in F \text{ et } g \in G\}$. Mq H est un sev de E.

- $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ donc $0_E \in H$.
- Stabilité par CL : $\forall (x, y) \in H^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
  Par définition, il existe $\begin{cases} x_F \in F\,,\, x_G \in G \\ y_F \in F\,,\, y_G \in G \end{cases}$ tq $\begin{cases} x = x_F + x_G \\ y = y_F + y_G \end{cases}$
  Donc $\lambda.x + \mu.y \;=\; \lambda.(x_F + x_G) + \mu.(y_F + y_G) = \underbrace{\lambda.x_F + \mu.y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda.x_G + \mu.y_G}_{\in G}$.
  Il s'agit de la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, donc $(\lambda.x + \mu.y) \in H$. ok

---

dem T7 :

Montrons 1) $\Rightarrow$ 2). On suppose 1). Soit $x \in F + G$.
Supposons qu'il existe deux décompositions : $x = x_F + x_G = \tilde{x}_F + \tilde{x}_G$.
On a alors $\underbrace{x_F - \tilde{x}_F}_{\in F} = \underbrace{\tilde{x}_G - x_G}_{\in G}$. Autrement dit, l'élément $z = x_F - \tilde{x}_F$ appartient à F et G. Comme $F \cap G = \{0_E\}$, on a $z = 0_E$, ce qui implique $x_F = \tilde{x}_F$ et $x_G = \tilde{x}_G$. ok

Montrons 2) $\Rightarrow$ 1). On suppose 2). Soit $x \in F \cap G$.
On peut alors interpréter les égalités : $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ comme la mise en évidence de deux décompositions de x dans $F + G$. Par unicité, on a donc $x = 0_E$ et $0_E = x$. ok

---

dem T8 : L'égalité $F+G = E$ signifie exactement que tout élément $x \in E$ admet une décomposition $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$. Le reste de la démonstration découle donc de [T7].

---

dem T9 :

- Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$, on a l'équivalence :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p \iff (\lambda_1 - \mu_1)e_1 + \cdots + (\lambda_p - \mu_p)e_p = 0$$

  Une famille libre est une famille pour laquelle cette dernière phrase implique : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$.
- Si l'un des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ (mettons e_j) est une CL des autres, alors il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!] \setminus \{j\}}$ tels que

$$e_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i e_i$$

  ce qui, en passant tout à gauche, met en évidence une CL des e_i qui vaut 0 :

$$e_j - \sum_{i \neq j} \lambda_i e_i = 0$$

  Le coefficient devant e_j est non nul (il vaut 1), donc il s'agit bien d'une liaison. Ainsi, la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est liée.

  Réciproquement, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est liée, alors il existe une liaison

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$$

  pour laquelle, donc, au moins l'un des λ_i est non nul. Il existe donc $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_j \neq 0$. On peut alors isoler e_j dans l'égalité précédente :

$$e_j = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i e_i$$

  Le vecteur e_j est donc une CL des autres vecteurs. ok

► Une égalité du type $e_j = 0$ est en elle-même une liaison ! En effet, elle peut être vue comme :

$$0.e_1 + \cdots + 0.e_{j-1} + 1.e_j + 0.e_{j+1} + \cdots + 0.e_p = 0$$

► Fixons $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre, et $x \in E$ un vecteur.

- Supposons $x \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tq

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

et donc :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p - x = 0$$

ce qui met en évidence une liaison des $(e_1, \ldots, e_p, x)$. Cette famille est donc liée.

- Supposons $x \notin \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Montrons qu'alors la famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu \in \mathbb{K}$. Supposons :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu x = 0 \qquad (*)$$

et montrons que tous ces scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu$ sont nuls.
Commençons par montrer **par l'absurde** que $\mu = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors on peut isoler x dans $(*)$:

$$x = -\frac{1}{\mu}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p)$$

Cela montre que x est une CL des e_i, c'est-à-dire que $x \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. **Contradiction.**
On a donc $\boxed{\mu = 0}$, et la relation $(*)$ devient :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$$

Or, $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, donc $\boxed{\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i = 0}$.
On a bien montré que la famille est $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est libre.

L'équivalence est bien démontrée.

---

dem T10 : quitte à permuter les P_i (ce qui ne change rien au problème), on peut supposer qu'ils sont rangés par ordre de degrés croissants (et même strictement croissants, puisqu'ils sont de degrés deux à deux distincts). On suppose donc sans perdre de généralité que :

$$0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$$

On procède alors par récurrence finie en posant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathcal{H}(i) \ : \ "(P_1, \ldots, P_i) \text{ est libre}"$$

— Initialisation : la phrase $\mathcal{H}(1)$: "(P_1) est libre" est vraie car $P_1 \neq 0$.
— Hérédité : soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{H}(i)$.
Le polynôme P_{i+1} ne peut pas être une CL de $P_1, \ldots, P_i$, car pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_i \in \mathbb{K}$:

$$\deg(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_i P_i) \leqslant \max(\deg(P_1), \ldots, \deg(P_i)) = \deg(P_i) < \deg(P_{i+1})$$

On a donc $\begin{cases} (P_1, \ldots, P_i) \text{ libre} \\ P_{i+1} \notin \text{Vect}(P_1, \ldots, P_i) \end{cases}$ donc $(P_1, \ldots, P_i, P_{i+1})$ est libre, ce qui montre $\mathcal{H}(i+1)$.
— Conclusion : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}(i)$ est vraie, et donc en particulier pour $i = n$.

---

dem T11 : Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, c-à-d une famille libre et génératrice. Soit $x \in E$. Montrons l'existence et l'unicité des coordonnées de x dans $\mathcal{E}$.

Comme $\mathcal{E}$ est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.e_i$.

Mq ces λ_i sont uniques. Si $x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i.e_i$, alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.e_i \;=\; \sum_{i=1}^{p} \mu_i.e_i \qquad \text{et donc} \qquad \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i).e_i = 0$$

Or, les e_i sont libres, donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = \mu_i$. ok

---

dem T12 :

1. Soit $x \in E$. Comme $F \oplus G = E$, il existe une unique décomposition $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$. Or :

   — $(e_1, \dots, e_k)$ base de F donc il existe un unique $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$ tq $x_F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.e_i$.

   — $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ base de G donc il existe un unique $\begin{pmatrix} \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n-k}$ tq $x_G = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i.e_i$.

   D'où finalement une décomposition unique de x : $x = x_F + x_G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i$. ok

2. ▶ Mq $F + G = E$. Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{E}$ est une base, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \;=\; \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i}_{\in G} \qquad \text{ok}$$

   ▶ Mq $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. Par définition, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.e_i = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i.e_i$. Autrement dit, on a

$$\lambda_1.e_1 + \dots + \lambda_k.e_k + 0.e_{k+1} + \dots + 0.e_n \;=\; 0.e_1 + \dots + 0.e_k + \lambda_{k+1}.e_{k+1} + \dots + \lambda_n.e_n$$

   Les e_i sont libres, donc par identification, tous les λ_i sont nuls. Donc $x = 0_E$. ok

---

---

dem T13 : Par commodité, on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme. *Soit $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice d'un ev E. Si une famille $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ vérifie que tous les $g_i \in$ Vect$(\mathcal{E})$, alors elle est elle-même génératrice.*

dem lemme : Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.g_i$. Or chacun des g_i appartient au sev Vect$(\mathcal{E})$ donc (stabilité par CL) $x \in$ Vect$(\mathcal{E})$. ok

▶ **dem du thm de la base incomplète** On reprend les notations de l'énoncé. L'idée de la démonstration est d'ajouter des vecteurs de $\mathcal{G}$ un par un, jusqu'à obtenir une famille génératrice. On définit par récurrence la suite de famille de vecteurs $\mathcal{L}_k$, pour $k \in [\![p, p+n]\!]$, de la façon suivante :

initialisation : $\mathcal{L}_p = \mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$
relation de récurrence : lorsque $\mathcal{L}_k$ est construite pour un $k \in [\![p, p+n-1]\!]$, on distingue deux cas pour définir $\mathcal{L}_{k+1}$:
— 1er cas : si Vect$(\mathcal{L}_k) = E$ (c-à-d $\mathcal{L}_k$ génératrice), alors $\mathcal{L}_{k+1} := \mathcal{L}_k$.
— 2nd cas : sinon, d'après le lemme, l'un des g_i n'appartient pas à Vect$(\mathcal{L}_k)$, mettons g_{i_0}. On pose alors $e_{k+1} := g_{i_0}$ et $\mathcal{L}_{k+1} := (e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$.

Deux remarques sur les $\mathcal{L}_k$ ainsi construits :

1. par construction, toutes les familles $\mathcal{L}_k$ sont libres. En effet, les vecteurs ajoutés ne sont pas des CL des précédents.
2. La dernière, $\mathcal{L}_{p+n}$, est nécessairement génératrice. En effet :
   — soit le 1er cas s'est réalisé $\longrightarrow$ ok ;
   — soit on a toujours appliqué le 2nd cas, ce qui signifie qu'on a ajouté TOUS les g_i. $\mathcal{L}_{p+n}$ contient donc $\mathcal{G}$ qui est génératrice, donc elle est elle-même génératrice.

Finalement, $\mathcal{L}_{p+n}$ est bien une base de E. ok

▶ **dem du thm de la base extraite** Soit $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice d'un ev E.
Une méthode possible consiste à retirer un par un les éventuels vecteurs de $\mathcal{G}$ qui s'écrivent comme CL des autres, jusqu'à obtenir une famille libre. Mais en utilisant le thm précédent, on peut procéder de façon plus élégante :
Soit g un vecteur non nul de $\mathcal{G}$ (il y en a au moins un). La famille $\mathcal{L} = (g)$ est libre. D'après le thm de la base incomplète, on peut la compléter avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ de façon à obtenir une base. ok

---

---

dem T14 : Tout d'abord, E admet une base finie. En effet, par définition, il admet une famille génératrice finie, et d'après le thm de la base extraite, on peut en extraire une base. ok
Fixons une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

- ▶ Montrons qu'une famille $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_N)$ de cardinal $N > n$ ne peut pas être libre.

  Comme $\mathcal{E}$ est une base, chaque u_j peut s'écrire comme une CL des e_i : $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.e_i$. Pour mq $\mathcal{U}$ est liée, il suffit de trouver $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^N$ **non tous nuls** tq $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j.u_j = 0$.

  Or, une CL de CL des e_i est une CL des e_i. Plus précisément, on a

  $$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j.u_j \;=\; \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} e_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\lambda_j \right) e_i$$

  donc il suffit d'avoir, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\lambda_j = 0$. Cela correspond au système suivant (système d'inconnus les λ_j) :
  $$\begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 & +\cdots+ & a_{1,N}\lambda_N & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 & +\cdots+ & a_{n,N}\lambda_N & = & 0 \end{cases}$$
  Il s'agit d'un système homogène à n lignes et N inconnues. Le nombre de variables principales est donc $\leqslant n$, ce qui implique qu'au moins $N - n$ variables sont passées en paramètres dans l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan. Il y a donc une infinité de solutions, et en particulier des solutions **non nulles**. ok

- ▶ Montrons qu'une famille de cardinal $< n$ ne peut pas être génératrice.
  Par l'absurde : si c'est le cas, alors d'après le thm de la base extraite, on peut en extraire une base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ dont le cardinal p est lui-aussi $< n$. La démonstration précédente, en intervertissant les rôles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{U}$, montre que c'est alors $\mathcal{E}$ qui ne peut pas être libre ! $\rightarrow$ Contradiction. ok

---

dem T15 : On note n la dimension de E, et on considère $\mathcal{E}$ une famille de n vecteurs.

— Si $\mathcal{E}$ est libre, alors on peut la compléter par des vecteurs $f_1, \dots, f_p$ pour obtenir une base (thm de la base incomplète). Cette base est alors de cardinal $n + p$, et comme E est de dimension n, on a $n + p = n$. C'est impossible, sauf si $p = 0$, autrement dit si $\mathcal{E}$ était déjà une base. ok

— Si $\mathcal{E}$ est génératrice, alors on peut en extraire une base (thm de la base extraite). Cette base doit être de cardinal n. C'est donc $\mathcal{E}$. ok

---

dem T16 : On note $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

1. Par définition, $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de F. D'après [T14], son cardinal (c-à-d p) est supérieur à la dimension de F (c-à-d $\text{rg}(e_1, \dots, e_p)$). ok
2. $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$ signifie que $\dim(F) = p$. Si c'est le cas, alors $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille de cardinal p génératrice d'un sev de dimension p. Elle est donc aussi libre.
   Réciproquement, si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, alors comme elle est génératrice de F, c'est une base de F. Elle est de cardinal p, donc $\dim(F) = p$, c-à-d $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$. ok

---

dem T17 : On note n la dimension de E.

- Mq F est de dimension finie. Comme E est de dimension n, toute famille libre de F a un cardinal $\leqslant n$. On peut donc poser $p \in \mathbb{N}$ le max des $k \in [\![0, n]\!]$ tels qu'il existe une famille libre de F de cardinal k.
  Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de F. Mq'elle est génératrice dans F, c-à-d $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
  Soit $x \in F$. Raisonnons par l'absurde : supposons que $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est une famille libre de F de cardinal $p+1$. Contradiction. Donc $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
  $(e_1, \dots, e_p)$ est donc libre et génératrice de F. C'est donc une base de F. F est donc de dimension finie, et $\dim(F) = p \leqslant n$. ok
- Montrons l'implication $\dim(F) = \dim(E) \Rightarrow F = E$.
  Si $\dim(F) = n = \dim(E)$, alors F admet une base $(e_1, \dots, e_n)$. Vue dans E, il s'agit d'une famille libre de cardinal n, donc c'est une base de E. Donc $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = F$. ok

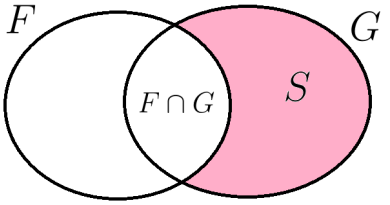
---

dem T18 : On note n la dimension de E. Soit F un sev de E, de dimension p.

- Mq F admet un supplémentaire.
  Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète cette base en $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ (thm de la base incomplète). On pose alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, et comme $(\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } F}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\text{base de } G})$ est une base de E, on a $F \oplus G = E$ (thm des bases adaptées). ok
- Soit G un supplémentaire de F dans E. On note q sa dimension. G admet une base $(g_1, \dots, g_q)$. Comme $F \oplus G = E$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E (thm des bases adaptées). Donc son cardinal, $p + q$, vaut n. Donc $q = n - p$. ok
- Il s'agit d'une somme directe, car $F \cap G = \{0_E\}$, ce qui permet de noter $F + G = F \oplus G$. Reste à mq $F \oplus G = E$.
  On pose $\tilde{E} = F \oplus G$. D'après le point précédent, la dimension de $\tilde{E}$ est $\dim(F) + \dim(G)$, c-à-d $\dim(E)$ par hypothèse.
  $\tilde{E}$ est donc un sev de E de même dimension que E. Par théorème (T17) : $\tilde{E} = E$. ok

---

dem T19 : On se place dans $\tilde{E} = F + G$.
$F \cap G$ est un sev de G, donc il admet un supplémentaire S dans G : $(F \cap G) \oplus S = G$.
On a donc $\dim(G) = \dim(F \cap G) + \dim(S)$, ce qui implique $\dim(S) = \dim(G) - \dim(F \cap G)$.



L'objectif est alors de démontrer que $\tilde{E} = F \oplus S$. En effet, cela implique que

$$\dim(F + G) \;=\; \dim(\tilde{E}) \;=\; \dim(F) + \dim(S) \;=\; \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

ce qui est bien la formule de Grassmann.

- $F \cap S = \{0_E\}$?
  Soit $x \in F \cap S$. On a $x \in S \subset G$, donc $x \in G$. Donc $x \in F \cap G$, et $x \in S$. Or les deux sev $(F \cap G)$ et S sont par définition de S en somme directe : $(F \cap G) \cap S = \{0_E\}$. Donc $x = 0_E$. ok
- $F + S = \tilde{E}$?
  Soit $x \in \tilde{E}$. $\tilde{E} = F + G$ donc $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$. Or, $G = (F \cap G) \oplus S$ donc $x_G = \underbrace{x_{F\cap G}}_{\in F\cap G} + \underbrace{x_S}_{\in S}$.
  Finalement, $x = \underbrace{x_F + x_{F\cap G}}_{\in F} + \underbrace{x_S}_{\in S}$. ok